МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE



УДК 621.7.074 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-3-295-301

Математическая модель формообразования зубчатых изделий объемным инструментом с одним параметром движения



А. А. Силич, Э. М. Юсупова
ФГКВОУ ВО «Тюменское высшее военно-инженерное командное училище имени маршала инженерных войск А. И. Прошлякова» Министерства обороны Российской Федерации (г. Тюмень, Российская Федерация)

Введение. Статья посвящена разработке математической модели однопараметрического формообразования зубчатого изделия. В качестве примера рассмотрено формообразование боковой поверхности зубьев колеса передачи Новикова, показан характер и величины изменения погрешности формообразования по высоте зуба колеса. Целью работы являлась разработка математической модели поверхности зубьев изделий, как огибающая производящей поверхности инструмента. Выполнено расчетно-экспериментальное исследование. Полученные математические модели могут использоваться в устройствах с копирами при формообразовании боковой поверхности зубьев колеса передачи Новикова.

В качестве примера рассматривается характер отклонения профиля зубьев колеса передачи Новикова с исходным контуром ДЛЗ 0,7–0,15.

Материалы и методы. При построении модели и исследовании ее характеристик используется математический аппарат теории зацепления, методика расчета цилиндрических передач — авторские разработки Силича А. А. В работе предложены новые математические модели уравнений боковой поверхности зубьев изделия, образованного с помощью инструмента, осевой профиль которого совпадает с исходным контуром. В рассматриваемой модели инструмент совершает движение вдоль оси изделия при вращении последнего вокруг своей оси. В ходе исследования проведено численное моделирование для определения величины погрешности формообразования профиля изделия с помощью инструмента.

Результаты исследования. Разработаны новые математические модели и программное обеспечение для численного моделирования формообразования зубчатого изделия с помощью инструмента с одним независимым параметром движения. Также разработан алгоритм определения величины погрешности отклонения реального профиля от номинального для зуба колеса передачи Новикова. Приведены решения для точного воспроизведения профиля зуба.

Обсуждение и заключения. Параметрический способ аналитического описания поверхности, использованный в работе, упрощает вычисления перемещений режущего инструмента в задачах числового программного управления. Решение задачи синтеза технологии обработки поверхности деталей на металлорежущих станках предусматривает разработку описания всего процесса формообразования и требует представления поверхности детали в виде математической модели. Полученные результаты могут быть использованы в процессе создания отделочных методов обработки зубьев, при повышении качества зубчатых колес и передач, а также производительности обработки.

Ключевые слова: зубчатые изделия, математическая модель, однопараметрическое формообразование, погрешность формообразования.

Для цитирования: Силич, А. А. Математическая модель формообразования зубчатых изделий объемным инструментом с одним параметром движения / А. А. Силич, Э. М. Юсупова // Advanced Engineering Research. — 2020. — Т. 20, № 3. — С. 295−301. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-3-295-301

Mathematical model of shaping toothed products using volumetric tool with one motion parameter

A. A. Silich, Eh. M. Yusupova
Tyumen Higher Military Engineering Command School (Tyumen, Russian Federation)

Introduction. The development of a mathematical model of one-parameter shaping of a toothed product is considered. As an example, shaping of the side surface of the teeth of the Novikov gearing is studied; the mode and magnitude of the change in the shaping error heightwise the wheel tooth are shown. The work objective was to develop a mathematical model of the surface of the product teeth as a generating surface envelope of the tool. A computational and experimental study is carried out. The mathematical models obtained can be used in devices with copiers when shaping the side surface of the teeth of the Novikov gear. As an example, we consider the deviation behavior of the teeth profile of the Novikov gear with the original profile of DLZ 0.7-0.15
Materials and Methods. When building the model and studying its characteristics, the mathematical tools of the gearing theory, calculation procedure for cylindrical gears (A.A. Silich's author development) were used. The paper proposes new mathematical models of the equations of the lateral surface of the gear teeth formed with a tool whose axial profile coincides with the original one. In the model under consideration, the tool moves along the axis of the product while the latter rotates on its axis. In the course of the study, numerical modeling was carried out to determine the error value in shaping the product profile using the tool.
Results. New mathematical models and software have been developed for numerical simulation of the shaping of a toothed product using a tool with one independent motion parameter. An algorithm has also been developed to determine the deviation error of the real profile from the nominal one for the tooth of the Novikov gear. Solutions to accurately reproduce the tooth profile are provided.
Discussion and Conclusions. The parametric method of analytical description of the surface used in the work simplifies the calculation of the cutting tool displacements in the problems of numerical control. Solving the problem of synthesizing the technology of workpiece surface treatment on metal-cutting machines provides the development of a description of the entire shaping process and requires the representation of the workpiece surface in the form of a mathematical model. The results obtained can be used under creating finishing methods for processing teeth when improving the quality of gear wheels and gear drives, as well as production efficiency.

Keywords: toothed products, mathematical model, one-parameter shaping, error of shaping.

For citation: A.A. Silich, E.M. Yusupova**.** Mathematical model of shaping toothed products using volumetric tool with one motion parameter. Advanced Engineering Research, 2020, vol. 20, no. 3, p. 295−301. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-3-295-301

Введение. Рассматривается процесс формообразования боковой поверхности зуба колеса передачи Новикова с использованием следующего алгоритма:

— описывается производящая поверхность инструмента в системе координат этого инструмента;
— реальная поверхность зубьев колеса формируется как огибающая производящей поверхности инструмента при движении последнего относительно колеса с независимыми параметрами;
— проводятся численные исследования по отклонению реальной поверхности от теоретической и анализ полученных результатов.

В соответствии с ГОСТ 13 755–81 для режущего инструмента стандарт устанавливает нормативный ряд модулей и определенные соотношения между размерами элементов зуба. Эти соотношения определяются для зубчатых колес параметрами исходной рейки через параметры ее нормального сечения — исходный контур. В качестве инструмента в работе рассмотрен шлифовальный круг.

Относительное движение звеньев передачи или инструмента и заготовки при обработке можно описать одним или двумя независимыми параметрами. Поверхность зубьев первого звена является огибающей однопараметрического или двухпараметрического семейства поверхностей второго звена. Очень часто поверхность зубьев изделий в процессе его обработки формируется как огибающая производящей поверхности инструмента при движении последнего относительно изделия с одним независимым параметром. В большинстве случаев в качестве такого параметра выбирают угол поворота изделия.

Теоретическая поверхность зубьев колеса в процессе его финишной обработки абразивным инструментом формируется как огибающая производящей поверхности инструмента при движении последнего относительно колеса с независимыми параметрами. Теоретической поверхностью, в соответствии с ГОСТ 16 530–83, является каждая из двух поверхностей (боковые поверхности двух зубьев), обеспечивающие при их взаимодействии заданное передаточное отношение.

В связи с вышеизложенным была поставлена задача по определению уравнений боковой поверхности зубьев изделия. Поверхности образованы с помощью инструмента, осевой профиль которого совпадает с исходным контуром. При этом инструмент совершает движение вдоль оси изделия, а колеса — согласованное вращение вокруг своей оси. Так как вращение изделия и перемещение инструмента связаны между собой аналитической зависимостью, то в качестве независимого параметра формообразования зубчатого изделия выбран угол поворота изделия $\varphi_к$.

Материалы и методы. Для получения уравнения номинальной производящей поверхности инструмента в работе была использована система координат, жестко связанная с рейкой. В качестве исходного контура принято нормальное сечение рейки. На рис. 1 в качестве примера показан обобщенный исходный контур, взятый из исследовательских работ [1, 2]. Контур составлен из дуг окружностей, которые могут плавно сопрягаться между собой или пересекаться, что зависит от типа исходного контура.

На рис. 1 цифрами в кружках показаны номера участков (i=1,2,3,…7). Границы участков выделены крупными точками. Кроме этого, на рис. 1 приняты следующие обозначения: S_i $(X_i;Y_i;Z_i)$ системы координат, связанные с i-тым участком исходного контура. Начало координат такой системы совмещено с центром окружности участка, а направление осей совпадает с направлением осей системы координат рейки S_p $(X_p;Y_p;Z_p)$.

Решение задачи разбито на два этапа. На первом этапе строится математическая модель объемного инструмента в виде тела вращения (например, дискового шлифовального круга или дисковой фрезы). На втором этапе с помощью инструмента формообразуется зубчатое изделие с одним независимым параметром движения.

Математическая модель инструмента

Получим теоретическую производящую поверхность, привязав поверхность инструмента с системой координат S_u $(X_u;Y_u;Z_u)$, направив ось Z_u вдоль оси вращения инструмент. Ось X_u расположим таким образом, чтобы она проходила через расчетную точку, в качестве которой принимаем точку касания инструмента и изделия в начальный момент времени. Ось Y_u направлена так, чтобы все оси составляли правую декартовую систему координат. С исходным контуром связана собственная система координат $S_p(X_p;Y_p)$, оси которой расположены так, чтобы ось Z_p совпадала с делительной прямой исходного контура, а ось X_p, была ей перпендикулярна и направлена в сторону оси инструмента.

Для формообразования производящей поверхности инструмента применяются устройства, работающие с помощью копира, либо устройства, воспроизводящие траекторию движения правящего алмаза или заточного инструмента с помощью системы ЧПУ. Для любого из этих случаев математическое описание производящей поверхности инструмента будет однотипным[1, 2] [3].

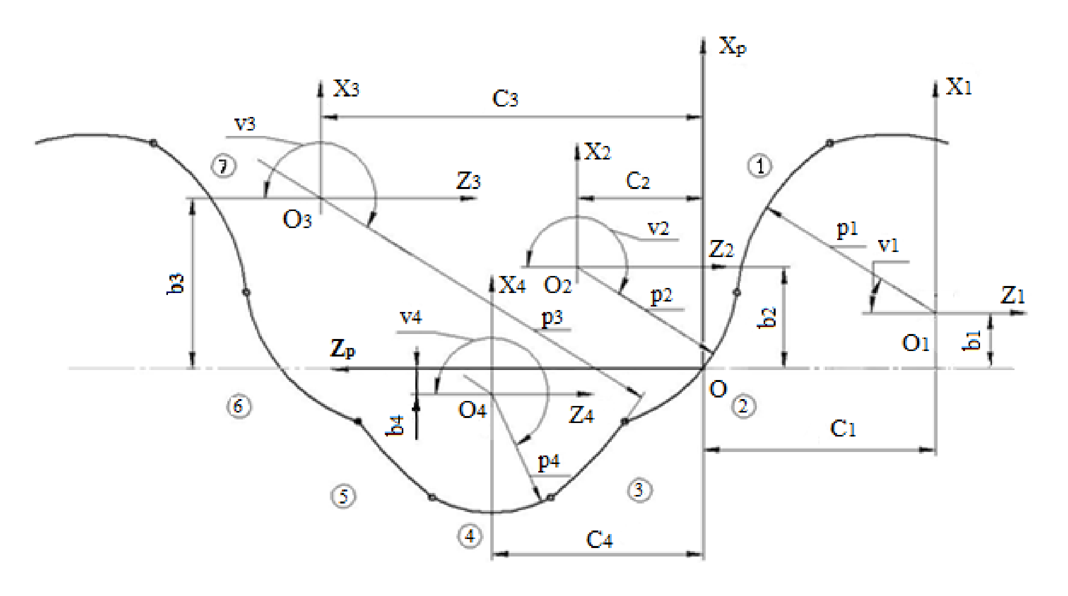


Рис. 1. Исходный контур ДЛЗ-0,7-0,15

На рис. 2 показано взаимное расположение инструмента 1, исходного контура *2,* копира *3*, схемы

[1] Кривошейкин, А. В., Нурмухамедов Л. Х., Перелыгин С. В. Математическое моделирование в приборных системах : учеб. пособие. СПб. 2019. 108 с.

[2] Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие. Т. 2015. 236 с.

правильного устройства и принятые системы координат, связанные с копиром и инструментом.

Математическую модель производящей поверхности инструмента будем рассматривать как след движения контура копира при его вращении вокруг оси Z_u с угловым параметром движения φ_u.

В системе координат S_p уравнение профиля копира, включающие участки 1, 2 и 3 можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} X_p &= \rho_i \cdot \sin \upsilon_i + b_i; \\ Z_p &= \rho_i \cdot \cos \upsilon_i + c_i; \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где обозначение величин взяты из работ [4–6]: ρ_i — радиус кривизны i-го участка нормального профиля зуба рейки; υ_i — криволинейная координата производящей поверхности рейки, начало отсчета которой идет по часовой стрелке от оси Z_p; c_i — аппликата положения центра кривизны соответствующего участка в системе S_p; b_i — абсцисса центра кривизны соответствующего участка в системе координат S_p.

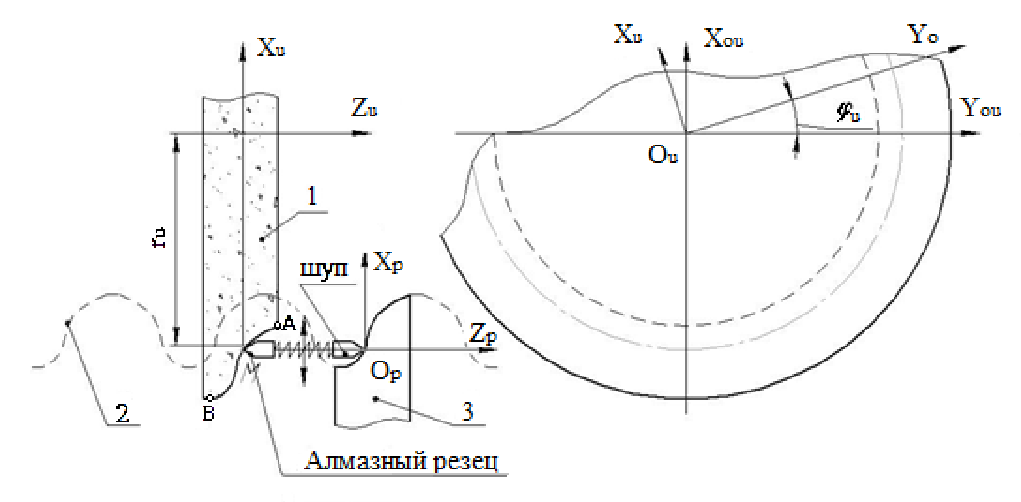


Рис. 2. Схема формообразования инструмента с принятой системой координат

Кроме этого на рис. 2 обозначен расчетный радиус инструмента r_u.

Воспользовавшись выбранными системами координат, введенными обозначениями и методикой формообразования поверхностей[3], получим уравнение производящей поверхности инструмента в проекции на оси координат:

$$\widetilde{r_и} = \begin{Bmatrix} X_{ui} = cos\,\varphi_{ui} \cdot (\rho_i \cdot sin\,\upsilon_i + b_i - r_u); \\ Y_{ui} = -\,sin\,\varphi_{ui} \cdot (\rho_i \cdot sin\,\upsilon_i + b_i - r_u); \\ Z_{ui} = -\rho_i \cdot cos\,\upsilon_i - c_i. \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Для получения математической модели изделия понадобится уравнение нормали к производящей поверхности инструмента. Поэтому, используя известную методику [3] и опуская промежуточные преобразование, запишем уравнения орта нормали к производящей поверхности в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} e_{xui} &= -\cos \varphi_u \cdot \sin \upsilon_i; \\ e_{yui} &= \sin \varphi_u \cdot \sin \upsilon_i\,; \\ e_{zui} &= \cos \upsilon_i. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Математическая модель изделия

Геометро-кинематическая схема формообразования боковой поверхности зуба изделия с помощью инструмента с соответствующими системами координат показана на рис. 3. Участки производящей поверхности инструмента заданы в системе координат $S_u\,(X_u;\ Y_u;\ Z_u)$, жестко связанной с инструментом. Система координат $S_к\,(X_к;Y_к;Z_к)$ жестко связана с обрабатываемым изделием (например, зубчатым колесом). Неподвижные вспомогательные системы координат колеса S_{ou} $(X_{ou};Y_{ou};Z_{ou})$ и инструмента $S_{ок}$ $(X_{ок};Y_{ок};Z_{ок})$, связанные со стойкой.

В качестве независимого параметра относительного движения при обработке изделия примем величину $\varphi_к$, численно равную углу поворота колеса вокруг оси $Z_к$. Перемещение инструмента вдоль оси изделия

[3] Раннев, Г. Г., Тарасенко А. П. Интеллектуальные средства измерений : учеб. пособие. М. 2016. 280 с.

обозначено как S_o. Угол наклона линии зуба изделия — $\beta_к$. Межосевое расстояние — $a=r_u+r_k+X_k$.

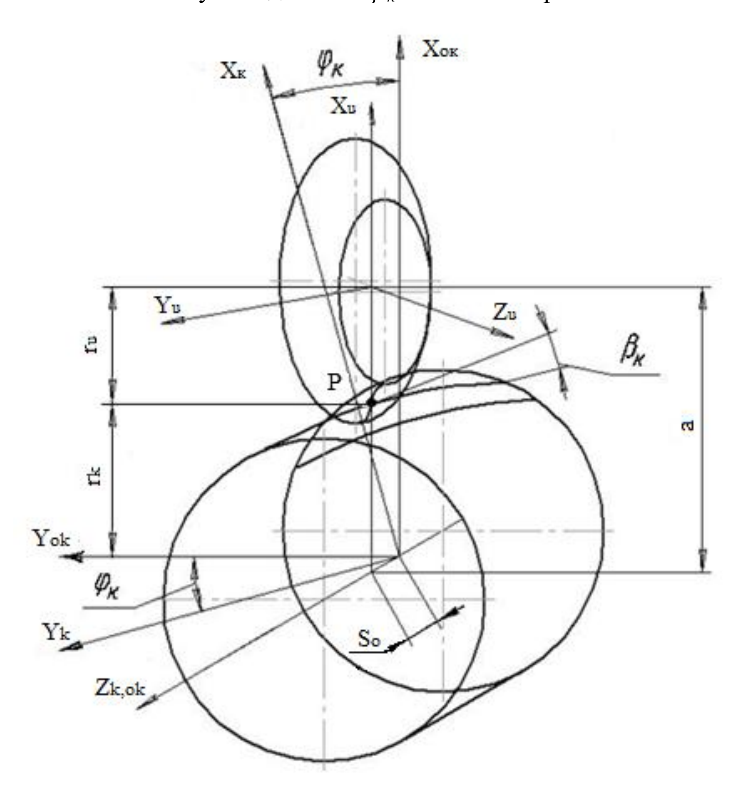


Рис. 3. Геометро-кинематическая схема формообразования профиля зуба изделия инструментом

Реальная поверхность зуба изделия, как огибающая однопараметрического семейства производящей поверхности инструмента, определяется следующим уравнениями [3]:

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{r}_к = \tilde{A}_{кui} \cdot \tilde{r}_u & \text{а)} \\ \bar{e}_{ui} \cdot \bar{V}_{ui} = 0 & \text{б)} \end{array}\right\}, \qquad (4)$$

где $\tilde{r}_u$ — матрица-столбец, составленная из проекций производящей поверхности инструмента, записанной в системе координат S_u; $\tilde{A}_{кui}$ — матрица перехода от системы координат S_u к системе координат $S_к$; $\bar{V}_{ui}$ — аналог вектора относительной скорости по параметру φ_u; $\bar{e}_{ui}$ — орт нормали к производящей поверхности инструмента, проекции которого на оси координат X_u, Y_u, Z_u представлены уравнениями (3).

Матрицу перехода $\tilde{A}_{кui}$ найдем воспользовавшись методикой изложенной в работах [3, 7]. Опуская промежуточные преобразования, данную матрицу представим в следующем виде:

$$\tilde{A}_{кui} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_к & \sin\beta_к \cdot \sin\varphi_к & -\cos\beta_к \cdot \sin\varphi_к & a\cdot\cos\varphi_{ui} \\ -\sin\varphi_к & \sin\beta_к \cdot \cos\varphi_к & -\cos\beta_к \cdot \cos\varphi_к & -a\cdot\sin\varphi_{ui} \\ 0 & \cos\beta_к & 1 & -S_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$S_o = \frac{\varphi_к \cdot r_к}{\tan\beta_к} = \frac{\varphi_к \cdot m \cdot z_к}{2\cdot\sin\beta_к}$$

$$a = r_к + X_к + r_u = \frac{m\cdot z_к}{2\cdot\cos\beta_к} + X_к + r_u.$$

Воспользовавшись методикой однопараметрического формообразования поверхностей [3], принятыми системами координат и геометро-кинематической схемой формообразования (рис. 3), а также опуская промежуточные преобразования, уравнение реальных поверхностей зубьев изделия можно записать так:

$$\left.\begin{array}{l} x_{кi} = \cos\varphi_к \cdot \cos\varphi_u \cdot \sin\beta_к \cdot \sin\varphi_к \cdot \sin\varphi_u \cdot (\rho_i \cdot \sin\upsilon_i + b_i - r_u) + \\ \quad + \cos\beta_к \cdot \sin\varphi_u \cdot (\rho_i \cdot \cos\upsilon_i + c_i) \\ y_{кi} = \sin\varphi_к \cdot \cos\varphi_u \cdot \sin\varphi_u \cdot \sin\beta_к \cdot \cos\varphi_к \cdot (\rho_i \cdot \sin\upsilon_i + b_i - r_u) + \\ \quad + \cos\beta_к \cdot \cos\varphi_к \cdot (\rho_i \cdot \cos\upsilon_i + c_i) \\ z_{кi} = -\cos\beta_к \cdot \sin\varphi_u \cdot (\rho_i \cdot \sin\upsilon_i + b_i - r_u) - \\ \quad - \sin\beta_к \cdot (\rho_i \cdot \cos\upsilon_i + c_i) - \varphi_k \cdot r_k \cdot ctg\,\beta_к \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Используя методику получения уравнения зацепления (4 б)[4], окончательно запишем его в следующем виде:

[4] Раннев Г. Г., Тарасенко А. П. Интеллектуальные средства измерений. 280 с.

$$\cos\beta_к \cdot [\sin\varphi_{ui} \cdot \sin\upsilon_i \cdot (c_i - r_k \cdot \sin\beta_к + X_k \cdot \tan\beta_к + r_u \cdot \tan\beta_к) - \\ - \cos\upsilon_i \cdot (r_k + X_k)] = 0 , \quad (7)$$

где $X_к$ — смещения исходного контура.

Результаты исследования

Для определения величины погрешности формообразования профиля изделия с помощью инструмента был использован следующий алгоритм:

1. Реальная и номинальная поверхности зубьев изделия записывались в одной системе координат. В качестве номинальной поверхности зубьев изделий были взяты уравнения боковой поверхности зубьев колеса, образованных с помощью рейки[5] [3].

2. Задавалось текущее значение независимого параметра υ_j, где j=1, 2, 3−n — текущий номер точки на профиле зуба колеса.

3. Принимая $Z_{кi}=const$, определялось значение второго независимого параметра $\varphi_{кj}$ номинального профиля изделия.

4. Через текущую точку υ_j профиля зуба изделия проводилась окружность, определялось её пересечение с реальным профилем зуба изделия.

5. В качестве погрешности формообразования принималось расстояние по хорде между точками номинального и реального профиля, расположенных на одной и той же окружности.

Разработанный алгоритм по определению погрешности формообразования был реализован в виде программы в программной среде MathCAD.

В качестве примера на рис. 4 показан характер изменения реального профиля, по сравнению с номинальным, и направление отсчета погрешности Δ_{ij} формообразования профиля зуба колеса передачи Новикова.

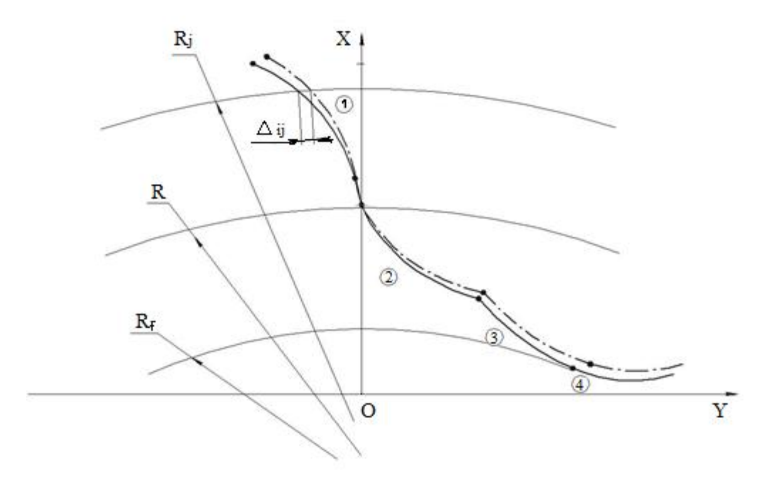


Рис. 4. Характер отклонения профиля зубьев колеса передачи Новикова:

——— — номинальный профиль; — · — — реальный профиль

Реальные значения погрешностей Δ_{ij} приведены на рис. 5 для зубчатого колеса передачи Новикова с исходным контуром ДЛЗ 0,7–0,15 и следующими геометрическими параметрами: модуль зацепления m_n=5, число зубьев колеса $z_к$=50, угол наклона линии зуба $\beta_к$=20º, смещения исходного контура $X_к$=0.

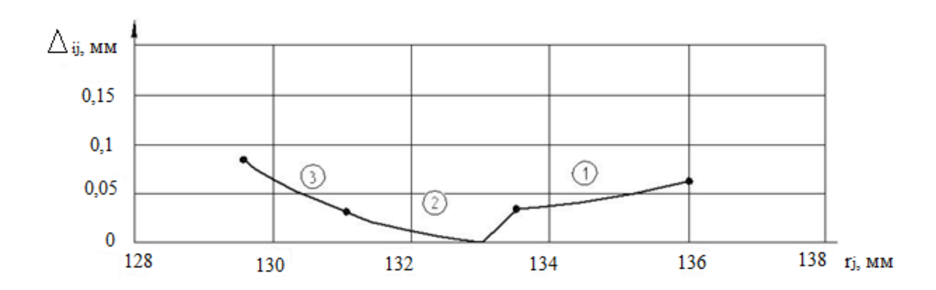


Рис. 5. Отклонение реального профиля от номинального для зуба колеса передачи Новикова

[5] Зюзьков В. М. Математическая логика и теория алгоритмов. 236 с.

Как видно из графика на рис. 5, минимальное значение отклонения находятся в районе делительного радиуса колеса, а максимальные значения наблюдаются на головке и в основании зуба колеса. Максимальные величины формообразования профиля зависят от вида исходного контура, числа зубьев, угла наклона линии зуба, а также от диаметральных размеров инструмента.

Обсуждение и заключения. Разработана математическая модель формообразования зубчатого изделия с помощью инструмента с одним независимым параметром движения.

1. Численные исследования показывают, что по данной схеме обработки невозможно теоретически точно воспроизвести контур зуба изделия, если производящая поверхность инструмента образована по профилю исходного контура обрабатываемого изделия.

2. Максимальные искажения профиля наблюдаются на головке и ножке зуба колеса (у диаметра выступов и впадин) и их величина тем больше, чем выше исходный контур, больше модуль зацепления, меньше число зубьев и больше угол наклона зуба.

3. Для точного воспроизведения профиля зуба необходима корректировка копира, по которому осуществляется правка и заточка инструмента.

Библиографический список

1. Силич, А. А. Передачи Новикова. Геометрический расчет цилиндрических передач Новикова / А. А. Силич. — Тюмень : Изд–во ТИУ, 2016. — 79 с.

2. Силич, А. А. Цилиндрические передачи Новикова. Методика геометрического расчета / А. А. Силич. — Дюссельдорф : Lambert Academic Publishing, 2013. — 90 с.

3. Ломова, О. С. Математическое моделирование структурных изменений в поверхностях заготовок при тепловых возмущениях в процессе шлифования / О. С. Ломова // Омский научный вестник. — 2013. — №2(120). — С. 95–98.

4. Силич, А. А. Технология обработки зубчатых колес цилиндрических передач Новикова / А. А. Силич. — Тюмень : Изд. ТюмГНГУ. — 2007. — 162 с.

5. Litvin, F. L. Computerized Generation and Simulation of Meshing and Contact of New Type of Novikov-Wildhaber Helical Gears / F. L. Litvin, P.-H. Feng, S. A. Lagutin // NASA / Contractor Report-2000-209415 / ARL-CR-428, 2000. — 55 p.

6. Litvin, F. L. Development of Gear Technology and Theory of Gearing / NASA Reference Publication 1406, ARL-TR-1500, 1998.

7. Литвин, Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф. Л. Литвин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1968. — С. 584.

Сдана в редакцию 08.06.2020
Запланирована в номер 10.08.2020

Об авторах:

Силич Александр Анатольевич, доцент кафедры «Военно-технических дисциплин» ФГКВО ВО «Тюменское высшее военно-инженерное командное училище имени маршала инженерных войск А.И. Прошлякова» Министерства обороны Российской Федерации, (625000, РФ, г. Тюмень, ул. Л. Толстого, 1, доктор технических наук, профессор, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1114-4726, silichaas@gmail.com

Юсупова Эльвира Мирхатовна, преподаватель кафедры «Естественно-научные и общепрофессиональные дисциплины» ФГКВО ВО «Тюменское высшее военно-инженерное командное училище имени маршала инженерных войск А.И. Прошлякова» Министерства обороны Российской Федерации (625000, ул. Л. Толстого, 1, г. Тюмень), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0463-1067 , jusupovaem@tyuiu.ru

Заявленный вклад соавторов:

А. А. Силич — научное руководство, анализ результатов исследований, формирование основной концепции. Э. М. Юсупова — формирование цели и задачи исследования, проведение расчетов, подготовка текста, формирование выводов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.